OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1897. Nr. 6.

Notes sur l'histoire des mathématiques.

Par
H.-G. Zeuthen.

Suite.

(Présenté à la séance du 23 avril 1897).

VII. Barrow, le maître de Newton.

Les précurseurs des grandes découvertes excitent souvent, dans l'histoire des sciences, moins d'attention qu'ils ne le méritent. Ils ont fait peut-être des progrès assez considérables dans maintes directions: on n'y pense plus dès qu'on connaît d'avance la voie la plus directe pour arriver au but élevé dont ils ne se sont approchés que par tel ou tel détour. Ils ont peut-être découvert des points de vue généraux embrassant beaucoup de faits jusqu'alors isolés ou même inconnus: on ne s'y intéresse guère du moment qu'un successeur immédiat nous ouvre un nouvel horizon où se réunissent tous les chemins dominés par ces différents points de vue.

On a tort en agissant ainsi. L'histoire des sciences n'a pas seulement pour objet de rapporter les progrès qui nous ont approché visiblement de notre savoir actuel; elle doit aussi nous expliquer comment ces progrès ont été préparés par le développement antérieur. Et c'est le prédécesseur immédiat du grand inventeur qui nous montre jusqu'à quel point le champ a été préparé à celui-ci. Selon moi, on fait même tort aux génies supérieurs en négligeant ainsi de chercher les points de départ de leurs sublimes découvertes. Tant qu'on ne regarde que l'immensité des progrès qu'on leur doit, l'admiration reste froide. En apprenant à connaître l'origine et le développement successif de leurs idées, en voyant le mieux possible la manière dont ces idées se rattachent les unes aux autres et à celles des prédécesseurs, l'intérêt qu'ils nous inspirent prend de la vie, nous nous sentons excités à imiter leur exemple, du moins dans quelques-unes des petites conquêtes dont se compose leur grande œuvre, et, comprenant mieux cette œuvre, nous saurons mieux profiter de tout ce qu'elle nous a apporté.

L'étude de l'histoire des sciences a encore un autre objet, particulièrement important pour la science mathématique, c'est de tirer de l'oubli les procédés et les points de vue, utiles en leur temps mais abandonnés au moment où on a trouvé de nouvelles méthodes conduisant plus facilement au but. Il est vrai que ces méthodes nouvelles ont peut-être plus directement atteint tous les buts qu'on se proposait alors; mais il n'en résulte pas que les instruments qu'elles ont remplacés doivent rester à jamais inutiles. En effet, la science dans sa marche en avant se propose chaque jour de nouveaux buts, exigeant d'autres armes que celles qui sont actuellement en usage. Il arrive donc souvent qu'on a besoin — peut-être avec quelque modification — d'un des procédés qu'on avait abandonnés. Où en trouverait-on de meilleurs modèles que dans les ouvrages mêmes qui ont précédé immédiatement l'invention des méthodes qui les ont remplacés?

Je n'ai pas craint de donner quelque développement à ces pensées que vient d'évoquer en moi la lecture des *Lectiones geometricæ* [1]) d'Isaac Barrow (1630—77), dès 1663 pro-

[1]) Barrow: *Lectiones opticæ et geometricæ*, 1re édition 1669—1670, seconde édition 1674.

fesseur Lucasien de géométrie à Cambridge, où il eut pour élève Newton, qui y avait commencé ses études en 1660. Les bonnes relations du maître et de l'élève sont attestées par les mentions des conseils de Newton qui se trouvent dans le livre que nous venons de citer, par la circonstance que Barrow, encore assez jeune, abandonna sa chaire en 1669 en faveur de son glorieux disciple, par les témoignages de reconnaissance que Newton donne constamment à ceux qui ont préparé la voie à ses propres découvertes. La continuité du développement qu'on reconnaîtra en comparant les travaux de l'un et de l'autre n'est donc pas fortuite. On trouvera plutôt dans le livre de Barrow des choses qui appartiennent déjà à Newton; mais nous verrons que la distinction de ce qui est propre au maître et de ce qui revient à l'élève ne présente pas des difficultés insurmontables.

Ce qui rend pour nous les leçons géométriques de Barrow si intéressantes, c'est avant tout qu'elles nous montrent le point culminant jusqu'où les recherches infinitésimales s'étaient élevées avant de prendre sous les mains puissantes de Newton et de Leibniz une forme toute nouvelle. A cet égard Barrow occupe une position qui le distingue soit de ses propres prédécesseurs soit de ses grands successeurs. Pour bien caractériser ces distinctions, je rappellerai l'un des deux fondements mathématiques du calcul infinitésimal dus à Newton dont j'ai parlé dans une Note précédente [1], et une intéressante analyse de cette Note par M. Paul Tannery [2].

Les deux points de départ du calcul infinitésimal dont j'avais parlé dans ma Note, c'étaient: 1° la découverte du caractère inverse des opérations que, dès la génération antérieure, on savait effectuer pour résoudre les problèmes des tangentes et les problèmes de quadrature; et 2° l'usage des

[1] La cinquième de cette série, ce Bulletin 1895, p. 193 et suiv.
[2] Bulletin de Darboux, 1896, p. 24—28.

séries infinies. Tout en reconnaissant complètement l'importance que j'avais attribuée à ce dernier instrument, le pénétrant géomètre et érudit historien que je viens de citer saisit l'occasion pour présenter quelques observations sur la première des deux sources du calcul infinitésimal que j'avais indiquées. Très loin d'en nier l'importance — il l'avait signalée avant moi — il rappelle qu'à l'époque où commencent les recherches de Newton la reconnaissance de la relation inverse entre le problème des tangentes et celui des quadratures était depuis vingt-cinq ans au moins une idée dans l'air. Il le prouve principalement au moyen de certains passages empruntés à une lettre de Descartes. Il est vrai que dans ces passages, qui se rapportent au problème inverse des tangentes et sur lesquels nous reviendrons, on ne trouve pas l'indication — essentielle dans cette connexion — que c'est aux quadratures qu'il faut réduire ces problèmes; mais croyant que presque toujours les idées mathématiques ont été dans l'air avant qu'on ait su en tirer parti d'une manière systématique, j'accorde que ces passages ont bien le sens que leur attribue M. Tannery. Quant à son explication des difficultés qui ont empêché Descartes et Fermat, Roberval et Pascal d'exprimer nettement l'idée en question et d'en tirer parti, je l'accepte d'autant plus volontiers qu'elle s'accorde très bien avec mes propres remarques dans une Note antérieure[1]) sur la manière dont Fermat traite les cas où ses quadratures nous conduiraient à des fonctions logarithmiques ou circulaires. J'insiste seulement sur l'existence de ces difficultés, assez fortes pour empêcher Fermat, le créateur du procédé de différentiation, d'en profiter pour donner à son intégration par parties la généralité qu'elle aurait obtenue par une application très simple de cette opération[2]). C'est donc un progrès très réel que fait Newton en trouvant les moyens de

---

[1]) Voir ce Bulletin 1895 p. 49.

[2]) Ibid. p. 51.

profiter d'une manière régulière du caractère inverse qui nous occupe. Et ce progrès sera illustré par le fait qu'il existe encore un point de vue intermédiaire entre celui des grands géomètres français et celui de Newton, savoir celui de Barrow.

J'essaierai de caractériser les trois points de vue de la manière suivante: les géomètres français avaient probablement une idée, ou du moins un sentiment, du caractère inverse des opérations servant à déterminer les tangentes et les aires; mais ils ne lui ont donné aucune expression précise, ce qui est évidemment la condition d'un usage fructueux. Barrow énonce d'une manière très précise ce caractère inverse; mais ce qui l'empèche lui aussi d'en tirer tout le parti possible, c'est qu'il n'a pas encore remarqué que la détermination des tangentes, ce que nous appelons depuis Leibniz la différentiation, est une opération beaucoup plus simple que les quadratures, une opération *directe*, qu'on trouve les moyens d'exécuter en même temps qu'on la définit, et que c'est par conséquent par elle qu'il convient de commencer. C'est seulement Newton et plus tard Leibniz qui ont fait cette découverte, et qui de l'ensemble des opérations infinitésimales ont su faire, en leur donnant l'ordre convenable, un tout systématique.

Ayant ici à nous occuper du point de vue intermédiaire de Barrow, nous devons chercher avant tout l'expression mathématique ou géométrique qu'il donne au caractère inverse des deux opérations, et nous demander comment il y est arrivé. A cet effet nous devons rappeler quelques traits du développement scientifique dont les recherches infinitésimales de Barrow sont la continuation.

En s'appropriant de plus en plus les idées et les résultats de la géométrie grecque, les restaurateurs des mathématiques en Europe devaient être conduits à s'occuper aussi des recherches infinitésimales que nous devons principalement à Archimède, et à y pénétrer assez profondément, non seulement pour comprendre la subtile logique qui fait le fond des méthodes d'exhaustion, mais encore pour se rendre maîtres des idées qui avaient mené aux résultats, au point d'imiter avec succès les procédés employés par les inventeurs anciens. C'est ainsi qu'on rétablissait la détermination du centre de gravité du paraboloïde indiquée par Archimède sans démonstration. Il suffit de renvoyer à cet égard au célèbre éditeur de Pappus, Frédéric Commandin, et à Simon Stevin.

Cependant cette continuation immédiate des travaux de l'antiquité n'aurait marché que très lentement et se serait restreinte à un petit cercle d'initiés, si aux idées déposées dans ces travaux les temps modernes n'avaient pas ajouté de nouvelles et fécondes idées.

Une partie de ces idées ont pour origine le colossal développement du calcul numérique qui s'était produit depuis le temps d'Archimède, développement dont l'introduction des méthodes de calcul des Indous n'est qu'un point saillant, mais qui s'était continué sans interruption par les savants arabes et modernes sous l'influence des exigences croissantes de l'astronomie. Ce développement a préparé d'une manière assez naturelle l'idée moderne de l'infiniment petit, caractérisé par la faculté qu'on a de négliger par rapport à lui les quantités qui deviennent ce que nous appelons à présent infiniment petites d'ordre supérieur. C'est en voyant comment on peut négliger dans les calculs pratiques portant sur un certain nombre de décimales les puissances de quantités assez petites, qu'on a appris à négliger aussi les mêmes puissances dans les recherches exactes, à condition de remplacer les quantités petites par des quantités infiniment petites. Cette connexion du calcul numérique avec l'idée de l'infiniment petit explique bien que ce soit le grand calculateur Kepler qui ait eu le premier le courage de soumettre directement et sans avoir recours à une démonstration d'exhaustion les quantités infiniment petites aux calculs, et de démontrer de cette façon une partie des résultats d'Archimède en même temps qu'il s'élevait à de nouveaux résultats. Ou comprend aussi que ce soit Briggs qui ait osé le premier approuver ces procédés. En réalité on trouve dans les travaux de Kepler, surtout dans ses investigations laborieuses sur les véritables mouvements des planètes, les recherches infinitésimales intimement liées aux calculs numériques.

Une autre idée qui devenait d'une grande importance pour le développement du calcul infinitésimal, c'est celle de la variation continue des quantités. A cause de la représentation géométrique qu'on donnait toujours aux quantités générales, cette variation devenait identique à un mouvement, celui de l'une des extrémités du segment représentant la quantité considérée. Or l'idée de mouvement continu était évitée systématiquement par les géomètres grecs, du moins dans les démonstrations qui prétendaient à être rigoureuses. Quoiqu'on regardât les fameux sophismes de Zénon comme des paradoxes et qu'Aristote eût démontré qu'ils ne portent pas sur la réalité physique du mouvement, cependant on respectait trop les raisons logiques qui les soutiennent pour regarder après lui comme une démonstration suffisante d'un théorème de géométrie infinitésimale la simple intuition de la variation continue, et on lui préférait une preuve fondée sur la méthode d'exhaustion. Dans notre siècle nous sommes revenus aux mêmes scrupules: nous reconnaissons que l'idée de mouvement continu est une conception composée qui demande elle-même des explications; mais en même temps on ne niera pas qu'une fois admise l'intuition de la variation continue aide puissamment à démêler tous les rapports des infiniment petits.

Elle y a aidé beaucoup au XVII^{e} siècle. Rappelons à cet égard que, grâce au mouvement simultané des extrémités des segments qui représentent deux variables (x et y), Neper donne des logarithmes naturels (pris négatifs parce qu'ils doivent correspondre à des fractions proprement dites) la même définition que nous exprimerions par l'équation différentielle

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{y}{r},$$

(où $r = 10^7$ remplace l'unité)[1]. L'étude du mouvement physique commencée dans le même siècle par Galilée devait contribuer puissamment à propager aussi l'usage plus théorique du mouvement dans les recherches géométriques. Comme à cet égard les procédés de Barrow se rattachent d'assez près à ceux de Galilée et de son élève Torricelli, nous devons rappeler ici quelques considérations qu'on doit à ces grands savants italiens.

Après avoir expliqué dans le troisième de ses célèbres *Discorsi* ce que c'est qu'un mouvement uniformément accéléré, Galilée le représente géométriquement en prenant le temps pour abscisse et la vitesse pour ordonnée. Le lieu des points déterminés par ces coordonnées sera une droite, et l'aire du triangle limité par cette droite représentera le chemin parcouru. Dans le quatrième *Discorso* Galilée s'occupe du mouvement d'un corps pesant lancé horizontalement avec une vitesse donnée. Il montre que la trajectoire sera une parabole dont le quart du paramètre, que nous appellerons $\frac{p}{2}$, est égal à la hauteur nécessaire pour donner à un corps tombant la vitesse même avec laquelle ce corps avait été lancé. Représentons la parabole par l'équation

$$2py = x^2.$$

Alors en un point quelconque de cette courbe le rapport des vitesses horizontale et verticale sera $\frac{p}{x}$. Torricelli remarque[2]) que ce rapport détermine la tangente à la trajectoire, et en y

---

[1]) *Constructio canonis mirifici,* 1619. Une petite divergence de ses logarithmes avec ceux que définissent l'équation indiquée et la condition de la correspondance de $x = 0$ et $y = r$ $\left(\frac{x}{r} = -\log\left(\frac{y}{r}\right)\right)$ tient seulement à une approximation incomplète dans les calculs.

[2]) Jacoli: *Evangelista Torricelli, Bulletino Boncompagni* VIII, 268—269.

substituant l'expression $\frac{x}{2y}$, qui résulte de l'équation de la courbe, il retrouve pour la tangente la détermination d'Apollonius[1]. Il est connu que Torricelli et, indépendamment de lui, Roberval ont généralisé cette méthode.

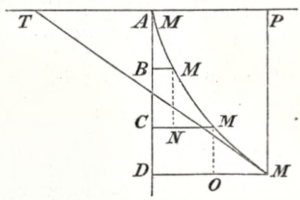
Barrow, qui cite expressément et Galilée et Torricelli[2], généralise aussi la représentation géométrique du mouvement rectiligne et uniformément accéléré de Galilée, en supposant que la vitesse, représentée par les ordonnées, varie d'après une loi quelconque. Ici encore l'espace parcouru sera représenté par l'aire limitée par l'axe des abscisses, par les deux ordonnées qui correspondent au commencement et à la fin du mouvement, et par la courbe dont les ordonnées représentent la vitesse. Barrow applique au même mouvement la méthode de Torricelli. Supposons qu'il a lieu le long d'une droite qui se meut uniformément en restant parallèle à elle-même. Alors les abscisses représenteront le temps, les ordonnées représenteront l'espace parcouru dans le mouvement rectiligne, et la vitesse de ce dernier mouvement sera représentée au moyen de la tangente à la trajectoire résultant du mouvement simultané de l'ordonnée et de l'abscisse. On aura ainsi deux représentations différentes de la dépendance mutuelle du temps, de l'espace parcouru et de la vitesse dans un seul et même mouvement rectiligne. L'unité de la dépendance dont on aura ainsi deux représentations différentes est une expression du caractère inverse des deux opérations servant à déterminer l'espace dans un cas et la vitesse dans l'autre, ou bien de la quadrature et de la détermination des tangentes.

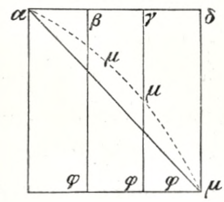
---

[1]) Les expressions de Torricelli ne sembleront par assez claires si l'on n'observe pas qu'il tient de Galilée le rapport $\frac{p}{x}$ des vitesses, et qu'il n'en cherche aucune autre démonstration. C'est ainsi qu'on s'explique un malentendu de l'endroit cité de la part de M. Cantor. (Vorlesungen II, p. 808.)

[2]) *Lectiones geometricæ* IV, 15 (je cite d'après la seconde édition, 1674, qui ne diffère du reste que très peu de la première).

Le scrupule avec lequel Barrow s'attache au cas traité par Torricelli et le soin qu'il prend de respecter l'homogénéité des relations nuisent du reste un peu à la simplicité de la représentation par laquelle il rend sensible la nature inverse des deux figures. Soit donnée une courbe MM qui passe par





le point d'intersection A de l'axe des abscisses[1]) AD et de l'axe des ordonnées AP. Faisons correspondre, dans une autre figure, à des abscisses $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ proportionnelles aux abscisses AB, AC, AD des aires $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ proportionnelles aux ordonnées (BM, CM, DM) de la courbe proposée. Alors le rapport de l'aire $\alpha\delta\mu$ au rectangle ($\alpha\delta\mu\varphi$) formé par les coordonnées extrêmes de la dernière courbe sera égal à celui de l'ordonnée correspondante (DM ou AP) de la première courbe à sa sous-tangente TP interceptée sur l'axe des ordonnées. Comme, à un facteur constant près, que pour plus de commodité nous égalons à l'unité, $DM = \alpha\delta\mu$, on aura $TP = \alpha\delta \cdot \delta\mu$, ou bien, en égalant aussi les abscisses appelées proportionnelles par Barrow, on verra que l'ordonnée $\delta\mu$ de la nouvelle courbe est égale au rapport $\frac{TP}{AD}$ de la sous-tangente de la première courbe (interceptée sur l'axe des ordonnées) à l'abscisse, ou bien égale à ce que nous appelons $\frac{dy}{dx}$. Dans

---

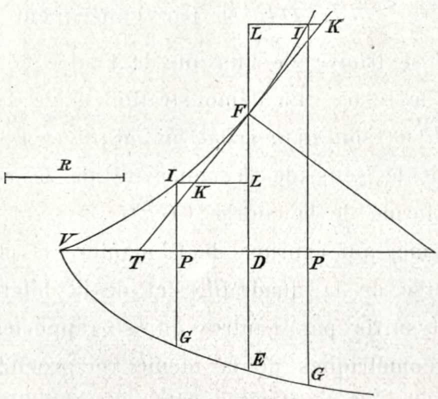
[1]) Nous donnons aux figures les mêmes positions que dans le livre de Barrow (IV, 16). Celui-ci ne se sert pas des mots «abscisses» et «ordonnées», mais les segments que nous appelons abscisses représentent la variable indépendante.

le cas considéré par Galilée et Torricelli, la courbe MM est une parabole, les ordonnées DM sont proportionnelles aux carrés des abscisses AD. Les aires $\alpha\delta\mu$ devenant aussi proportionnelles aux carrés des abscisses $\alpha\delta$, la courbe $\alpha\mu$ deviendra une droite, $\alpha\delta\mu = \frac{1}{2}\alpha\delta\mu\varphi$ et par conséquent $AP = \frac{1}{2}TP$.

Pour démontrer son théorème, Barrow remarque, conformément à ce que nous venons de dire, que $\alpha\delta$ représente le temps; AD est un espace parcouru avec une vitesse constante; DM ou AP, qui est représentée dans l'autre figure par l'aire $\alpha\delta\mu$, est un espace parcouru dans le même temps avec une vitesse variable finissant par prendre la valeur $\delta\mu$. TP, qui est l'espace que parcourrait un point ayant pendant tout ce temps cette vitesse finale, sera représentée dans l'autre figure par $\alpha\delta\mu\varphi$. On aura donc

$$\frac{\alpha\delta\mu\varphi}{\alpha\delta\mu} = \frac{TP}{AP}.$$

Dans la marge Barrow promet de démontrer plus tard la même connexion d'une manière plus géométrique. En le faisant



dans le n° 11 de la X^e leçon, il donne en même temps à son théorème une forme beaucoup plus simple. Il l'obtient en donnant aux deux courbes $VIFI$ et $VGEG$ les mêmes abscisses VD auxquelles correspondent les ordonnées DF et DE.

Barrow suppose que $R \cdot DF$, où R est constant, est égal à l'aire VDE limitée par l'ordonnée correspondante DE. Il résulte alors des considérations cinématiques précédentes que la sous-tangente DT de la courbe IFI aura la valeur $R\frac{DF}{DE}$. Barrow démontre la même chose géométriquement en faisant voir que la droite FT joignant le point F au point T de l'axe des abscisses dont la distance au point D a cette valeur est tangente en F à la courbe IFI. Il le prouve en montrant que les points I de cette courbe qui sont voisins de F de part et d'autre de ce point se trouvent du même côté de la droite TF.

Menons, en effet, une droite IK parallèle à l'axe des abscisses et rencontrant FT en K et DF en L. Alors, d'après les propriétés des deux courbes, l'aire $PDEG$ sera égale à $R \cdot LF$. D'un autre côté on déduit des proportions

$$\frac{LK}{LF} = \frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE}$$

que

$$LK \cdot DE = R \cdot LF = PDEG.$$

Or $PDEG \lesseqgtr IL \cdot DE$ et par conséquent $KL \lesseqgtr IL$, suivant que I se trouve de l'un ou de l'autre côté de F. La figure montre le reste. La démonstration exige seulement que l'ordonnée DE ne soit ni *maxima* ni *minima*. Elle montre du reste comment le sens de la concavité de la courbe $VIFI$ dépend de la forme de la courbe $VGEG$.

Ce théorème, qui exprime de la manière la plus simple le caractère inverse de la quadrature et de la détermination des tangentes, est suivie par d'autres qui se rapportent à d'autres applications géométriques de la même réciprocité et qui dépendent en outre de quelques règles simples de quadrature. Citons les suivantes, où nous désignons par y et v les ordonnées de deux courbes qui correspondent à la même abscisse et par S_t et S_n la sous-tangente et la sous-normale de la première courbe (y); l'aire de la courbe (v) désignera l'aire limitée par cette courbe, par l'axe des abscisses, par une ordonnée fixe et par l'ordonnée variable; nous égalerons encore les facteurs constants à l'unité:

X, 12. Si y^2 représente l'aire de (v), on aura $S_n = \frac{1}{2} v$.

XI, 1—3. Théorème réciproque de X, 12, et généralisations qu'on pourrait traduire par l'équation $\int y^r \cdot S_n dx = \frac{y^{r+2}}{r+2}$.

X, 13 et 14 contiennent des théorèmes analogues sur des courbes rapportées aux coordonnées polaires.

La plupart des propositions contenues dans la XI^e Leçon expriment aussi sous forme de théorèmes sur les quadratures une partie de nos formules différentielles les plus simples. Nous en citerons les exemples suivants, traduits dans le langage du calcul integral:

XI, 4. $\int \left(y \int y dx\right) dx = \frac{1}{2}\left(\int y dx\right)^2$.

XI, 5. $\int \sqrt{\int y dx} \cdot y dx = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\int y dx\right)^3}$.

XI, 10, théorème rapporté par Barrow à Gregory[1]):

$$\int S_t dy = \int y dx.$$

XI, 28. Si nous désignons par s la longueur de la courbe, on aura

$$\frac{1}{2} s^2 = \int \sqrt{y^2 + S_n^2} \, \frac{s}{y} \, dx.$$

Entre tous le théorème XI, 27 mérite notre intérêt. Soit q le segment intercepté par la tangente à une courbe sur l'axe des ordonnées à partir de l'origine; alors

---

[1]) Il se trouve dans la 11^e proposition de sa *Geometriæ pars universalis* 1668. La circonstance que Barrow reconnaît l'identité essentielle des deux théorèmes malgré une représentation géométrique différente de la quantité que nous avons appelée $\int S_t dy$ montre que, même sans posséder un tel algorithme, Barrow reconnaissait la généralité de la conception qui pour nous est attachée à ces symboles. Le théorème de Gregory est aussi un témoignage que la relation inverse qui nous occupe était alors «une idée dans l'air».

$$\int \frac{q}{y^2} dx = \frac{x}{y}.$$

Si l'on remplace q par son expression, donnée dans le calcul différentiel, $y - x\frac{dy}{dx}$, ce théorème sera identique à la règle de différentiation d'un quotient.

Ces divers théorèmes nous montrent: 1° que notre quotient différentiel est ordinairement remplacé par le rapport de l'ordonnée et de la sous-tangente, ce qui alors avait lieu aussi dans les recherches d'autres savants; 2° qu'en même temps que Barrow s'élève à des points de vue relativement généraux, il n'en possède encore aucun qui le dispenserait de consacrer une démonstration particulière à ces différents théorèmes; 3° qu'il n'a pas encore l'idée de faire de la différentiation la base de la quadrature. Il semble plutôt incliner à regarder comme un avantage de faire dépendre la détermination des tangentes des règles, plus développées à cet époque, qui ont rapport aux quadratures.

Cependant ces théorèmes, qui semblent encore plus variés sous la forme géométrique que leur donne Barrow, ont une tendance commune, qui est de réduire aussi à des quadratures les *problèmes inverses des tangentes*. Barrow le dit expressément dans l'introduction à la XI[e] Leçon, où il promet de donner des théorèmes servant à déduire des tangentes les mesures des quantités [1]), et dans l'appendice 3 de la XII[e] Leçon il expose une suite de problèmes de cette nature avec leurs solutions.

Avant d'en rendre compte, nous devons caractériser cette espèce de problèmes. Ils ont pour objet de trouver les courbes dont la tangente en chaque point a une propriété donnée. Traduits dans le langage de l'analyse moderne, ils s'exprimeraient par des équations différentielles du premier ordre. Si

[1]) . . . *apponemus jam quæ ad magnitudinum è tangentibus (seu è perpendicularibus ad curvas) dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt theoremata.*

l'on rapporte aussi à la même catégorie les problèmes où la propriété donnée des tangentes est indépendante du point de contact, et où il s'agit par conséquent d'enveloppes d'un système de droites, il est de fait qu'Apollonius en avait déjà donné des exemples [1]. Cependant les problèmes de cette nature, qui dépendraient des solutions singulières des équations différentielles, ne se trouvent pas au nombre de ceux dont on s'occupait à cette époque. Encore moins devons-nous y rapporter l'usage qu'on aura pu faire des tangentes menées par un point *fixe* à un système de coniques pour en distinguer les ellipses, les paraboles et les hyperboles [2].

Le premier exemple d'un problème inverse des tangentes, défini comme nous l'avons fait ici, est la *loxodromie*, courbe sphérique définie par la propriété que ses tangentes forment un angle constant avec les divers méridiens. Cette courbe, que suivrait un navire continuant toujours sa route dans la même direction indiquée par la boussole, a été imaginée par le portugais Pedro Nunez (Nonius) à l'époque brillante de la navigation portugaise. Plus tard Snellius lui a donné le nom que nous venons de rappeler.

Si l'on remplace la sphère par un plan, cette courbe sera remplacée par une spirale logarithmique caractérisée par la propriété des tangentes de former avec les rayons vecteurs un angle constant. Les recherches de Descartes [3]) et de Wallis [4]) sur cette courbe appartiennent donc aussi à celles qui nous occupent ici. En effet, comme ni la fonction exponentielle ni la fonction logarithmique n'étaient alors introduites formelle-

[1]) Voir le XVe chapitre de mon *Keglesnitslæren i Oldtiden.* Mémoires de l'Académie de Danemark 6e série, t. III, paru en allemand sous le titre: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.*

[2]) C'est une détermination de cette nature faite par Kepler que M. Cantor regarde comme le premier exemple d'un problème inverse des tangentes (Vorlesungen II, p. 754).

[3]) Œuvres (éd. Cousin) VII, 336—337.

[4]) Opera I, p. 560—561.

ment dans les mathématiques, on ne pouvait pas représenter d'emblée la courbe par son équation sous forme finie. Elle devait être caractérisée par une propriété identique à celle que nous exprimons par son équation différentielle, soit qu'on prît immédiatement pour point de départ la propriété des tangentes que nous venons de rappeler — et alors on avait immédiatement un problème inverse des tangentes — soit qu'on la définît par la nature des mouvements simultanés du rayon vecteur et du point parcourant le rayon vecteur. Cette dernière définition dont se sert Wallis est identique à celle que nous exprimerions par l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\theta} = kr.$$

Elle conduit immédiatement à la propriété des tangentes connue de Wallis et de Descartes, et en même temps elle rappelle d'assez près la définition des logarithmes donnée par Neper pour exprimer la même propriété que nous traduisons par l'équation $\log(r) = k\theta$.

L'attention fut appelée plus directement sur les problèmes inverses des tangentes par diverses questions sur quatre courbes que de Beaune adressa à Descartes et aux célèbres mathématiciens de Paris et de Toulouse (Fermat), et surtout par la réponse que fit Descartes à ces questions dans une lettre du 20 février 1639, qui a été publiée en 1667 [1]. Les énoncés des questions sont perdus; mais la réponse de Descartes nous permet de restituer ceux de la deuxième et de la troisième [2]), qui se rapportent précisément à la détermination de courbes dont

[1]) Édition Clerselier: La lettre se trouve dans le tome VIII, p. 105 s de l'édition des Œuvres de Descartes par Cousin. Voir aussi t. IX, p. 142.

[2]) Sur la première courbe nous apprenons seulement que de Beaune a déterminé l'espace qu'elle enclôt sans en connaître l'équation. Cette remarque est applicable aussi aux deux courbes suivantes, dont l'équation différentielle permet d'exprimer $\int y\,dx$ algébriquement en x et y.

les tangentes ont des propriétés données (et dépendant des positions des points de contact).

Dans sa réponse Descartes commence par faire la remarque qu'il «ne croit pas qu'il soit possible de trouver généralement la converse de sa règle pour les tangentes ni de celles dont se sert M. de Fermat non plus» — remarque d'autant plus juste qu'on voit par la suite que Descartes pense surtout à des solutions algébriques. C'est cette pensée qui le conduit à ébaucher sur-le-champ une méthode pour résoudre, s'il est possible, ces problèmes *a posteriori*, en déterminant d'abord par les méthodes directes les tangentes à une série ordonnée de courbes algébriques et cherchant ensuite si parmi ces courbes il y en a une qui satisfait à la condition donnée. En essayant de trouver la courbe demandée dans le deuxième des problèmes de de Beaune, il a été conduit à étendre ces essais à une série de courbes du degré 2 par rapport à l'une des variables et d'un degré montant jusqu'à mille par rapport à l'autre, probablement aux courbes

$$y^n = ax^2 + bx + c,$$

où $n = 1, 2, 3 \ldots$

A côté de cette méthode *a posteriori* il ébauche aussi une méthode *a priori* où il essaie de faire usage du fait que le point d'intersection de deux tangentes tendant à coïncider entre elles se trouve entre les deux points de contact, considération semblable à celle qui a conduit plus tard Leibniz à faire dépendre d'une différentiation la détermination des enveloppes. Dans le cas d'un problème inverse des tangentes proprement dit la méthode sera moins commode. Néanmoins Descartes a su s'en servir dans le cas de la deuxième et de la troisième des courbes sur lesquelles portaient les questions de de Beaune.

La deuxième de ces courbes devait être déterminée par la condition que

$$\frac{y}{S_t} = \frac{x - y}{a},$$

où S_t est la sous-tangente. Descartes commence par remarquer que la même courbe jouit de la propriété que le segment intercepté sur la droite

$$y = x - a$$

par la tangente et par la droite menée parallèlement à l'axe des y a une valeur constante, propriété qu'il laisse au lecteur le soin de vérifier par le calcul. Cette transformation du problème équivaut à la transformation de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{a}$$

par le changement de fonction

$$y_1 = y + a - x$$

en

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_1}{a}.$$

Après cette transformation — comme le remarque Descartes — le problème en question se pose en coordonnées obliques, où les axes font un angle de 45°, exactement comme le troisième en coordonnées orthogonales. La troisième des courbes a donc été donnée par la propriété que la sous-tangente est constante.

C'est seulement au problème ainsi transformé que Descartes applique sa méthode. Elle ne le conduit pas à une intégration, mais seulement à la construction suivante, que nous exprimerions par la même équation différentielle qui nous a servi à traduire le problème qu'il s'agit de résoudre: le point (x, y_1) se détermine par l'intersection de deux droites mobiles et parallèles aux droites $x = 0$ et $y_1 = 0$; dans la position $x = 0$, $y_1 = a$ les points d'intersection des droites avec les axes originaires ont la même vitesse; celle de la droite $x = \alpha$ reste constante, tandis que celle de la droite $y_1 = \beta$ est proportionnelle à sa distance à l'asymptote $y = x - a$ dont elle s'approche. Descartes croit que «ces deux mouvements sont tellement incommensurables qu'ils ne peuvent être réglés exactement l'un par l'autre; et ainsi que cette ligne est du nombre de celles que j'ai rejettées de ma Géométrie comme n'étant que mécaniques, ce qui est cause que je ne m'étonne plus de ce que je ne l'avois pu trouver de l'autre biais que j'avois pris, car il ne s'étend qu'aux lignes géométriques».

Descartes semble donc seulement parvenir à ce résultat négatif que la courbe cherchée n'est pas algébrique. Cependant sa représentation, si évidente pour nous qui l'avons déjà exprimée au moyen de l'algorithme actuel des équations différentielles, aura eu aussi un sens assez positif aux yeux de celui qui se rappelait que par cette description la relation entre x et y est exprimée exactement comme Neper avait exprimé la relation entre les nombres et leurs logarithmes. De même que M. P. Tannery[1]) je suis donc disposé à croire que Descartes regarde lui-même sa description des mouvements comme une réduction aux logarithmes. La manière dont les logarithmes s'expriment par les aires des hyperboles étant alors très bien connue, il lui eût donc été facile aussi de réduire à des quadratures le second et le troisième des problèmes proposés. En tout cas il ne faut pas fixer trop étroitement les limites du savoir de Descartes d'après une lettre écrite en réponse à une autre où lui sont proposées des questions d'une nature toute nouvelle. Il faut plutôt admirer la richesse des ressources qu'il a immédiatement à sa disposition.

A cause de l'identité qui existe à présent entre les problèmes inverses des tangentes et les autres problèmes qui dépendent d'équations différentielles, nous citerons encore ici le suivant que J. Gregory réduit à une quadrature[2]). Dans le langage mathématique actuel il s'exprime par

$$as = \int f(x)\,dx,$$

[1]) *Bulletin de Darboux*, 2e série, XII, p. 26.
[2]) *Geometriæ pars universalis*, Prop. 6.

où s désigne la longueur de l'arc cherché, $f(x)$ l'ordonnée d'une courbe donnée mais arbitraire. La solution de Gregory s'écrirait

$$ay = \int \sqrt{(f(x))^2 - a^2}\, dx.$$

Malgré le grand mérite des tentatives de Descartes, c'est à Barrow qu'on doit le premier essai systématique de réduire à des quadratures les problèmes inverses des tangentes. Son premier pas dans cette voie est et devait être l'énoncé direct du caractère inverse de la détermination des tangentes et de la quadrature, dont nous avons déjà parlé. Il sert immédiatement à réduire à une quadrature la détermination d'une courbe dont les tangentes doivent satisfaire à la condition

$$\frac{y}{S_t} = f(x),$$

où le rapport $\frac{y}{S_t}$ est identique à celui que nous désignons par $\frac{dy}{dx}$. Nous savons qu'on peut intégrer aussi beaucoup d'autres équations différentielles en les réduisant algébriquement à la même forme ou grâce à des changements de fonctions. Les théorèmes déjà cités d'après la XI[e] Leçon de Barrow[1]) nous montrent qu'en beaucoup de cas il était parvenu au même résultat par des considérations géométriques.

Les théorèmes XI, 1—3, indiquent par exemple qu'une courbe dont les tangentes ont la propriété exprimée par

$$y^r \cdot S_n = f(x)$$

a pour équation

$$\frac{y^{r+2}}{r+2} = \int f(x)\, dx,$$

et le théorème XI, 27, qu'une courbe dont les tangentes interceptent sur l'axe des ordonnées à partir de l'origine un segment égal à $y^2 f(x)$ aura pour équation

$$\frac{x}{y} = \int f(x)\, dx.$$

---

[1]) Voir p. 577.

Ce théorème exprime, si l'on fait usage de notations modernes, l'intégration de l'équation

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = f(x).$$

L'introduction à la XI^e Leçon que nous avons déjà citée nous montre que **Barrow** avait précisément en vue cet usage de ses théorèmes. En désignant par $f(x)$ une fonction arbitraire, nous ne lui avons pas non plus attribué un point de vue trop général; car ces fonctions sont représentées par les ordonnées de courbes que lui-même qualifie d'arbitraires. Cependant, en indiquant les différents problèmes inverses des tangentes résolus par les divers théorèmes de la XI^e Leçon, nous serions exposé à ne pas toujours dire précisément ce qu'il avait en vue lui-même. Ce danger disparaît devant l'appendice, 3 de la XII^e Leçon, où il donne lui-même aux questions qu'il traite la forme de problèmes inverses des tangentes.

Les deux premiers de ces problèmes sont pour nous modernes essentiellement identiques, et leur solution est la conséquence immédiate de la réciprocité des deux opérations infinitésimales. En substituant $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{y}{S_t}$, nous en traduirons l'énoncé par:

$$\text{I.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{(x-a)};$$

$$\text{II.} \quad \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Barrow les réduit aux quadratures, que nous exprimerions par

$$y = \int_a^x \frac{f(x)}{x-a}\,dx$$

et

$$y = \int_0^x f(x)\,dx.$$

Il n'y introduit donc aucune constante arbitraire, mais se borne à une intégrale particulière, dont résulterait du reste l'intégrale générale par un simple déplacement des coordonnées. Dans le premier cas il donne aussi l'expression de la longueur de la courbe cherchée. Il y ajoute des applications. Il remarque par exemple que la courbe trouvée dans la résolution du problème I sera une cycloïde dans le cas où $a = 0$ et $f(x) = \sqrt{bx - x^2}$. Pour le problème II nous citerons l'application

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

que Barrow intègre par

$$y = a \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a},$$

sans introduire, bien entendu, aucun symbole de cette fonction, mais en égalant y à un arc de cercle bien déterminé.

En traitant le problème III, Barrow trouve que la courbe dont la tangente satisfait à la condition $S_t = f(x)$ a pour équation

$$\int_0^x \frac{dx}{f(x)} = \int_c^y \frac{dy}{y}.$$

La dernière intégrale est représentée par l'aire limitée par une hyperbole équilatère, par l'axe des ordonnées et par les droites $y = c$ et $y = y$; c est ici une véritable constante arbitraire. Toutefois les problèmes précédents montrent que Barrow n'est pas conduit à l'introduire par un sentiment général du besoin de ce supplément aux solutions des équations différentielles. S'il le fait, c'est seulement pour éviter l'aire infinie qu'on obtiendrait en prenant simplement zéro pour limite inférieure. A cet égard il se montre pourtant plus habile que, longtemps après, Jean Bernoulli, qui regarde $\int \frac{dx}{x^n}$ comme infinie dans le cas où $n = 1$ parce qu'il a pris zéro pour limite inférieure fixe de ces intégrales.

Barrow s'occupe tout particulièrement du cas où la soustangente est égale à une constante k, c'est-à-dire du troisième problème de de Beaune auquel Descartes avait réduit aussi le deuxième. Dans ce cas on trouve avec les notations modernes

$$x = k \log \frac{y}{c}$$

où $\log \frac{y}{c}$ représente l'aire hyperbolique $\int_c^y \frac{dy}{y}$. Il ne fait pourtant pas ici usage du mot «logarithme», mais dans sa minutieuse discussion il attribue aux valeurs correspondantes de x et y les propriétés bien connues alors des logarithmes. Il déduit encore de l'équation différentielle plusieurs propriétés de la courbe trouvée, par exemple celle que nous écririons

$$\int_c^y y^n dx = k \frac{y^n - c^n}{n}.$$

Le problème IV contient, sans être posé précisément sous forme d'un problème inverse des tangentes, la détermination analogue d'une spirale logarithmique. Ici Barrow dit expressément que l'arc de cercle qui mesure l'angle polaire θ est le *logarithme* du rayon vecteur.

Les problèmes V et VI demandent la détermination des courbes dont les sous-tangentes polaires (S_t) satisfont aux conditions

$$\frac{S_t}{r} = \frac{1}{f(\theta)} \quad \text{et} \quad S_t = f(\theta).$$

Les problèmes suivants ne sont pas des problèmes inverses des tangentes, mais Barrow revient à ceux-ci dans le théorème IV du même appendice, qui réduit la détermination de la courbe satisfaisant à l'équation

$$\frac{S_t}{y} = \frac{f(y)}{\varphi(x)}$$

aux quadratures

$$\int \varphi(x)\, dx = \int f(y) \cdot dy.$$

On voit que par ce théorème Barrow *sépare* les variables. Il voit très bien la généralité de cette méthode et se reproche l'aveuglement (ἀβλεψία) qui l'a empêché de trouver ce théorème, qu'il appelle *fœcundissimum*, assez tôt pour commencer par lui et en déduire ensuite les autres. Ces remarques s'appliquent aussi aux théorèmes suivants. Le V^e réduit la détermination de la courbe satisfaisant en coordonnées polaires (r, θ) à l'équation

$$\frac{S_t}{r} = \frac{r \cdot f(r)}{\varphi(\theta)}$$

aux quadratures

$$\int f(r)\,dr = \int \varphi(\theta)\,d\theta$$

et le VI^e la détermination de la courbe satisfaisant en coordonnées orthogonales à l'équation

$$\frac{S_t}{T} = \frac{f(s)}{\varphi(x)},$$

où s est la longueur de l'arc et T celle de la tangente entre le point de contact et l'axe des abscisses, aux quadratures

$$\int f(s)\,ds = \int \varphi(x)\,dx.$$

Nous citerons encore ici des *Addenda*, qui ne se trouvent que dans la *seconde* édition. Sans être proprement des problèmes inverses des tangentes, ce sont de nouveaux exemples d'équations différentielles que Barrow réduit à des quadratures. Le plus compliqué de ces problèmes est le II^e, qui consiste à trouver la courbe dont l'arc s est égal à $f(x) - y$.

Ce que nous avons tiré ici de la riche collection de recherches et de résultats contenue dans les Leçons de Barrow est préparé et exposé avec un esprit de suite qui règne depuis le commencement du livre jusqu'à la fin, d'une manière qui doit nous convaincre que les idées que nous venons de présenter sont bien la propriété de l'auteur, et que les exposer a été son but exprès. Cette remarque est assez essentielle, surtout si l'on s'occupe de la manière dont il a préparé la voie à son grand successeur, Isaac Newton; car, d'après la préface, cet élève et ami a revu le manuscrit, conseillé des corrections et suggéré des additions de son propre cru [1]). Cependant plusieurs circonstances facilitent essentiellement la distinction de ce qui appartient respectivement à l'auteur et au collaborateur. Non seulement tout le livre nous présente une individualité que le lecteur attentif ne manquera pas de reconnaître; mais la distinction peut aussi être fondée sur des critères extérieurs. En effet, en ce qui concerne toutes les questions de propriété soit d'idées générales soit d'un détail bien inventé, Barrow nous montre toujours le même caractère droit et noble dont nous parlent ses biographes. Nous avons déjà dit qu'il rapporte loyalement à Galilée et à Torricelli la part qu'ils ont à sa découverte de la connexion entre les deux opérations infinitésimales. Il revendique même si peu l'honneur de l'emploi original qu'il fait de leurs recherches dans les premières Leçons qu'il hésite à les publier, croyant que ces Leçons à l'usage des commençants (*tyrones*) n'intéresseront pas les savants plus avancés. En plusieurs endroits il fait remarquer que tel résultat appartient à Gregory d'Aberdeen, et il ne néglige pas de dire qu'un élégant exemple d'une surface conique [2]) dont la quadrature peut être exécutée par une méthode générale indiquée par lui-même lui a été communiqué par un élève du Trinity College, François Jessop. Ces faits autorisent à supposer que Barrow n'aura pas manqué d'ajouter, conformément aux promesses de sa préface, ses éloges aux emprunts qu'il fait à son plus célèbre disciple. Nous ne nous tromperons donc pas en

---

[1]) *D. Isaacus Newtonus, collega noster (peregregiæ vir indolis ac insignis peritiæ), exemplar revisit, aliqua corrigenda monens, sed et de suo nonnulla penu suggerens, quæ nostris alicubi cum laude innexa cernes.*

[2]) Lectiones p. 118. La surface en question est la portion d'un cône ayant pour directrice une hyperbole équilatère, pour sommet un point situé perpendiculairement au-dessus du centre de cette courbe à une distance égale au demi-axe que limitent la directrice et deux génératrices. Barrow ne semble pas remarquer que ce cône est un cône de révolution. Cette citation nous montre du reste que Barrow avait à Cambridge d'autres habiles collaborateurs que Newton.

n'attribuant à Newton que les parties où Barrow parle expressément de l'ami à qui il les doit. Bien entendu cela ne nous empêche pas de croire que la revision de Newton peut avoir amené plusieurs autres améliorations ou que le commerce de Barrow avec ce grand esprit a contribué à développer ultérieurement les idées que lui-méme possédait déjà; mais si la solution d'un seul des problèmes dont nous avons rendu compte avait été due à Newton, Barrow n'aurait pas manqué de le dire expressément.

Cette opinion est essentiellement corroborée par la connaissance que nous avons des travaux que Newton avait déjà élaborés ou dont il s'occupait alors, savoir son *Analysis per æquationes infinitas* et sa *Methodus fluxionum.* Ces travaux représentent déjà un point de vue beaucoup plus avancé que celui de Barrow. Les emprunts faits à ce point de vue doivent donc aussi se révéler au milieu de leurs alentours par la manière dont ils s'en distinguent et par leurs rapports avec les idées que Newton a mises dans ses propres ouvrages. C'est ce qui a lieu précisément pour les endroits dont Barrow fait honneur aux suggestions de son illustre ami.

Nous avons déjà fait observer que c'est en donnant l'ordre convenable aux deux opérations principales que Newton a créé un nouveau point de vue pour les recherches infinitésimales. Or, pour devenir un bon point de départ de toutes ces recherches, la détermination des tangentes, la formation des fluxions, la différentiation (de quelque nom qu'on ait appelé cette opération fondamentale) doit, comme toute opération directe, être définie avec une simplicité et une généralité assez grandes pour que l'exécution résulte essentiellement de la définition. Vu la place capitale qu'allait prendre la différentiation, expliquée assez clairement par Fermat pour les applications immédiates aux problèmes de tangentes et aux questions de *maxima* et *minima*, toute amélioration et simplification des énoncés des règles qui la dirigent prennent la plus grande importance.

Les règles servant à déterminer algébriquement la tangente à une courbe donnée qu'on trouve à la fin de la Xe Leçon apportent de ces améliorations à l'énoncé de la méthode des tangentes de Fermat. D'abord ces règles se présentent d'une manière simple et précise. Elles demandent en termes très clairs la formation de la valeur limite du rapport des incréments simultanés et *indéfiniment petits* de l'abscisse et de l'ordonnée, rapport qu'on égale ensuite à celui de la sous-tangente et de l'ordonnée. Tandis que Fermat désigne le premier de ces incréments d'une manière uniforme par E, Barrow applique à tous les deux les notations uniformes e et a. Plus importants encore sont ses énoncés formels sur le calcul des quantités *indéfiniment petites,* en particulier la règle d'après laquelle on peut négliger dans ce calcul les termes de degré supérieur à *un* par rapport à ces quantités. Comme les termes finis se détruisent en vertu de l'équation de la courbe, il ne restera que ceux du degré un, et l'équation trouvée donne ensuite immédiatement le rapport cherché de a à e.

Il serait difficile de dire jusqu'à quel point les améliorations contenues dans ces règles et les cinq applications à des courbes données qui suivent appartiennent à Barrow ou à Newton; mais ce qui distingue les points de vue du maître et de l'élève, c'est la valeur qu'ils y attribuent. Barrow hésite à les publier après tant de méthodes connues[1]). Il le fait pourtant d'après le conseil de son ami, et d'autant plus volontiers que la méthode lui semble plus riche et plus générale que les autres dont il s'est déjà occupé[2]). On comprend ces remarques

[1]) On trouve un exemple peu connu à présent de ces méthodes dans Gregory: *Geometriæ pars universalis,* prop. 7. Comme Barrow, Gregory se sert des mêmes principes que Fermat. Ici déjà on trouve la même application du symbole o à une quantité évanouissante que dans les travaux de Newton.

[2]) . . . *subnectemus a nobis usitatam methodum ex calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud scio, post tot ejusmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex usu sit facere. Facio saltem ex*

modestes de Barrow, qui n'a en vue que les applications immédiates de cette méthode à la détermination des tangentes, laquelle s'exécute en réalité sans difficulté par l'emploi des règles de Fermat[1]. Newton au contraire, pour qui la définition des fluxions était déjà le point de départ de recherches s'étendant bien au delà de la détermination directe des tangentes, se plaisait à voir cette dernière détermination exposée dans la forme précise qu'exigeait le calcul des fluxions. Hésitant comme toujours à publier ses propres productions, il n'était pas fâché de voir lancer par Barrow ce ballon d'essai.

Ces considérations sont confirmées par la place qu'occupent dans le livre de Barrow les règles mentionnées. Elles ne portent aucun numéro, mais ne se présentent que sous forme d'additions à la X[e] Leçon. Le caractère de quelque chose d'étranger indiqué de cette manière extérieure correspond bien au fait que Barrow n'en fait aucune autre application directe que celles aux cinq exemples de déterminations de tangentes qui les suivent immédiatement. Évidemment il ne se doute pas que, grâce à sa propre découverte du caractère inverse de la détermination des tangentes et de la quadrature, elles fournissent un nouveau moyen de trouver et de démontrer les quadratures, auxquelles il aime à réduire toutes les autres questions. C'est seulement dans le premier appendice de la XII[e] Leçon qu'on trouve l'application de principes semblables à ceux qui sont contenus dans ces règles à la transformation et à la simpli-

---

amici consilio, eoque libentius, quod præ cæteris, quas tractavi, compendiosa videtur, ac generalis. Que l'ami cité ici et ailleurs sans nom (. . . *vir sane cum primis probus ast in hujusmodi negotiis flagellator improbus.* — Préface particulière des Leçons géométriques) ne soit autre que Newton, qui avait été mentionné dans la première préface, c'est ce qui n'a jamais été révoqué en doute. Dans le cas contraire Barrow aurait cité le nom, comme ailleurs celui de Jessop.

[1]) Que la *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* lui fût connue, c'est ce que montre, comme le fait remarquer justement M. Cantor (Geschichte III, p. 130), l'usage de la même notation *e* ou *E*.

fication de plusieurs quadratures; mais d'autre part il attribue aussi la publication de cet appendice aux conseils de son *ami* (Newton).

Les quadratures indiquées dans cet appendice ont des rapports avec le cercle et reviennent sous forme géométrique à l'intégration de différentielles trigonométriques. Les formules suivantes rendent dans le langage mathématique moderne une partie des résultats contenus dans cet appendice, où les logarithmes sont représentés par des aires hyperboliques; les n^{os} ajoutés sont ceux de l'appendice.

1. $\int_0^\varphi \sec\varphi \, d\cos\varphi = \log\cos\varphi.$

2. $\int_0^\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi = \log\cos\varphi$ (sans égard au signe).

3. $\int_0^\varphi \sec\varphi \, d\sin\varphi = \varphi.$

4. $\int_0^\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\sin\varphi = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$ (ou plutôt $= \frac{1}{2}(\text{corde }\varphi)^2$).

5—6. $\frac{1}{2}(\log(1+\sin\varphi) - \log(1-\sin\varphi)) = \int_0^\varphi \sec^2\varphi \, d\sin\varphi$

$$= \int_0^\varphi \sec\varphi \, d\varphi.$$

7. $\int_0^\varphi \sec^2\varphi \, d\varphi = \sin\varphi\sec\varphi.$

8. $\int_\varphi^1 \operatorname{tg}\varphi \, d\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}(\log(1+\sin\varphi) - \frac{1}{2}(1-\sin\varphi)).$

Le progrès essentiel marqué par l'exécution de ces quadratures ressort bien d'une comparaison avec celles de Fermat. Ce grand savant, à qui l'on doit les premières règles de la différentiation, ne savait pas en faire usage pour substituer dans ses quadratures une nouvelle variable à la variable indépendante. Voilà ce que fait ici Barrow sous l'influence de Newton, qui a développé plus tard cette méthode dans la IX^e proposition de son traité *De quadratura curvarum*[1]. Il réalise en effet ce que nous désignons aujourd'hui par la substitution de $d \sin \varphi$ à $\cos \varphi \, d\varphi$, au moyen du même triangle infinitésimal, formé de l'arc infiniment petit et de parallèles aux deux axes coordonnés, qui sert à la détermination des tangentes. Le n° 5 présente le premier exemple que nous connaissions du résultat de la décomposition des fractions à intégrer.

Si l'on excepte ces deux passages publiés sous l'influence avouée de Newton, le livre de Barrow nous donne une très juste idée de ce que le plus grand des géomètres aura dû à l'enseignement d'un maître digne d'un tel élève. Il est vrai qu'à l'époque de la publication de ce livre Newton était déjà beaucoup plus avancé dans la plupart des directions qui y sont signalées que ne l'était Barrow; nous allons le voir par exemple pour tout ce qui a rapport aux équations différentielles; mais aussi la circonstance qu'alors Newton aurait écrit autre chose sur ces matières nous montre l'originalité de notre auteur. La manière dont Barrow parle des cinq premières Leçons[2] qu'il avait conçues depuis plusieurs années et accommodées à l'usage des commençants montre que la substance de ces Leçons a appartenu au corps de doctrine qu'il enseignait à ses propres élèves, et qu'il avait dû exposer cinq ou sept années auparavant alors que Newton était du nombre; et la direction des recherches indiquées dans ces Leçons et poursuivies dans les autres aura été connue de bonne heure de Newton. C'est donc de Barrow que celui-ci tient la connaissance du caractère inverse des deux opérations infinitésimales, ou tout au moins sa démonstration cinématique de ce fait. En général le fondement cinématique qu'il donne à l'analyse infinitésimale est un héritage de

1) Voir ce Bulletin 1895, p. 211.

2) *Quas scilicet ante aliquot annos ut nullo animo evulgandi, ita procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret. Enim vero crassius et ἐπιπολαιότερον scriptæ sunt neque firme quicquam continent, extra tyronum, quibus accommodatæ sunt, usum.* (Préface des Leçons géométriques.)

son maître, qui lui aura communiqué aussi son intérêt pour les problèmes inverses des tangentes.

Nous avons déjà parlé ici et dans une Note précédente de l'usage tout nouveau que Newton allait faire du caractère inverse des opérations. Il faut nous occuper aussi de la valeur qu'ont prise entre ses mains les autres parties de cet héritage.

On sait que Newton, dans sa méthode des fluxions, considère un système de (n) quantités qui varient *en même temps.* Il les appelle *fluentes* et suppose toujours qu'il existe un nombre suffisant d'équations $(n-1)$ pour assurer la variation simultanée de ces quantités. L'idée des fluentes équivaut donc dans le langage moderne à regarder les quantités en question comme des fonctions d'une seule variable: *le temps.* Conformément à cette idée la différentiation est pour Newton la formation des expressions des *vitesses* avec lesquelles varient les différentes *fluentes:* ces vitesses il les appelle les *fluxions* des *fluentes.* On a objecté que par cette définition on ne fait qu'emprunter à la mécanique une idée qui aurait elle-même besoin d'une définition. Cela est vrai si l'on s'en tient exclusivement à la définition des fluxions; mais cette définition insuffisante en elle-même est suppléée par la règle de la formation des fluxions qui fait la base des démonstrations de Newton[1]). On voit alors que les fluxions $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \ldots$ des fluentes $x, y, z \ldots$ sont déterminées de la manière suivante: on remplace, dans les équations données, $x, y, z \ldots$ par $x + o\dot{x}$, $y + o\dot{y}$, $z + o\dot{z} \ldots$, et on déduit de ces nouvelles équations et des équations données les équations homogènes en $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \ldots$ qui ont lieu à la limite pour $o = 0$. En substituant à o, qui est un intervalle de temps infiniment petit, la notation moderne dt, on voit que cette détermination des fluxions équivaut à la définition des quotients différentiels par rapport au temps.

[1]) *Newtoni Opuscula* (éd. Castillion) I, p. 59—60.

Cette introduction d'une variable indépendante arbitraire, *le temps,* que les équations données ne contiennent pas immédiatement, a le grand avantage analytique qu'on peut prendre ensuite pour variable indépendante une quelconque des fluentes, en supposant qu'elle varie uniformément ou qu'elle mesure le temps[1]), par exemple x en posant $\dot{x} = 1$. Cela devient particulièrement utile lorsqu'on traite de fluxions de fluxions[2]). Par exemple, dans la recherche du rayon de courbure, Newton pose $\dot{x} = 1$, et $\dot{y}$ $\left(\text{qui est alors ce que nous appelons } \frac{dy}{dx}\right) = z$. Le rayon de courbure devient $\frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}}$. — Le retard apporté au choix de la variable indépendante fait éviter les difficultés que cause dans l'enseignement ordinaire du calcul différentiel le changement de la variable indépendante.

On voit donc que Newton ne se borne pas à emprunter à la mécanique — ou à la cinématique, comme nous le dirions à présent — la conception toute faite de la vitesse, mais qu'il en donne dans sa *Methodus fluxionum* toutes les explications nécessaires. Néanmoins il y a encore des puristes[3]) qui lui reprochent de faire usage, dans des recherches de mathématiques pures ou de géométrie, de la terminologie cinématique en parlant du temps et de la vitesse — de même que ceux qui cultivent à présent la *géométrie cinématique* reprochent à ceux qui regardent cette espèce de recherches géométriques comme corollaires de la cinématique de parler de mouvements là où l'on pourrait se contenter de parler de déplacements.

A ceux qui feront un semblable reproche à Newton, ou qui regardent la conception des différentielles définies sans

---

[1]) Tempus *formaliter* non considero, sed suppono, quod una ex propositis quantitatibus homogenea cum aliis crescat æquabili fluxu, ad quam ceteræ, tanquam ad tempus, referantur, quæ ideo per analogiam non inconcinne dici potest tempus. Opuscula I, p. 54.

[2]) Opuscula I, p. 214

[3]) Par exemple Weissenborn dans: *Die Principien der höheren Analysis.*

introduction expresse du temps comme un progrès essentiel par rapport aux points de vue de Newton, on peut répondre par les mêmes raisons qu'on fait valoir aujourd'hui pour prouver que les recherches de géométrie cinématique ne se distinguent à aucun égard essentiel des recherches cinématiques [1]. Il s'agit seulement de se rendre compte de ce que c'est que le *temps,* et à cette question Barrow donne dans sa I[e] Leçon géométrique une réponse complète, qui caractérise bien l'homme, qu'en sa qualité de prédicateur, on a appelé «*the exhaustive preacher*», parce qu'il épuisait toujours le sujet dont il s'était proposé de parler. Cette réponse, où se trouve fixé l'emploi qu'il fait du mouvement, et ensuite celui qu'en fait son successeur, Newton, justifie entièrement l'introduction de l'idée de temps dans des recherches purement analytiques ou géométriques. Elle ne diffère du reste des réponses modernes que je viens de rappeler que par sa longueur et par l'étalage d'érudition qui était à la mode du temps de Barrow.

Plusieurs de ses citations érudites sont du reste assez bien choisies. Il commence, par exemple, sa discussion en appliquant à la question particulière qu'il traite cette phrase d'Augustin: *Si nemo quærat, scio; si quis interroget, nescio,* application qui rappelle que l'idée de temps n'est pas une conception si étendue qu'en l'empruntant on s'expose en même temps à introduire une foule d'idées étrangères à la recherche dont on s'occupe. On s'en persuadera en voyant Barrow faire suivre ce jugement négatif de renseignements positifs sur tout ce qu'on peut dire de l'idée générale de temps, en se plaçant à un point de vue physique.

---

[1]) Voir par exemple les remarques de M. Jules Tannery dans son analyse d'un travail de M. Schoenflies (Bulletin de Darboux, 2e série, t. XVII, 1893, p. 319). Je n'ai pas besoin d'ajouter que, bien que je ne comprenne pas la différence de la géométrie cinématique et de la cinématique proprement dite, cela ne m'empêche pas d'admirer les recherches de ceux qui font de la première une science à part.

La limitation de l'idée de temps est précisée davantage par des citations d'Aristote, à qui il doit une partie de ses idées sur ce sujet et par les vers suivants qu'il cite d'après Lucrèce:

Nec per se quemquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidáque quiete.

Cependant nous ne suivrons pas le détail de la discussion de Barrow. Il nous suffira d'en résumer brièvement ce qui nous intéresse ici.

Nous ne percevons le temps que par les mouvements (variations). Nous pouvons observer que deux mouvements se font pendant le même espace de temps, ou que l'un dure le même temps que l'autre et quelque temps en plus, mais nous ne possédons pour mesurer le rapport d'intervalles de temps qui se suivent que les mouvements qu'on suppose uniformes. Il peut exister des raisons pour regarder certains mouvements comme plus ou moins uniformes, ceux des corps célestes ou ceux de nos pendules, et on peut éprouver le degré d'exactitude des hypothèses qu'on fait à cet égard en comparant ces différents mouvements.

Ces explications que Barrow donne de la conception physique du temps montrent bien qu'on n'a risqué aucun emprunt réel à la physique, en introduisant dans les recherches mathématiques l'idée du temps, telle que l'emploient Barrow et après lui Newton, pour la simple raison qu'il n'y a rien à emprunter au delà de ce qu'on veut précisémeut exprimer par cette introduction. Ce qu'on a en vue en introduisant le temps, c'est quelque chose d'indispensable dans la théorie des quantités variables, où l'on a toujours à s'occuper des valeurs simultanées, ou bien des valeurs que prennent les variables *en même temps*. D'un autre côté, les géomètres ne se soucieront pas de la mesure absolue du temps, tant que les physiciens ne la connaîtront qu'approximativement. Ils auront au contraire la pleine liberté de substituer à cette mesure un mouvement quelconque, comme l'a fait Newton. Le temps n'est donc pour eux qu'une variable indépendante, qui présente la commodité qu'on peut la choisir à son gré parmi les variables simultanées. En réalité, en parlant expressément du temps, on ne fait à la mécanique que les emprunts qu'y font tous ceux qui expliquent le calcul différentiel. Ils sont obligés de dire que les incréments des variables dont on cherche le rapport limite sont simultanés ou contemporains.

Voyons maintenant comment Newton a continué l'œuvre de Barrow relativement aux problèmes inverses des tangentes. Premièrement, grâce à l'introduction de la notation des fluxions, ces problèmes devaient prendre la forme, plus générale, parce qu'elle est plus abstraite, d'équations aux fluxions, identiques à nos équations différentielles. Ensuite Newton a remarqué que les efforts faits par Barrow pour réduire ces problèmes à des quadratures ne réussissent que dans un nombre très limité de cas. C'est pour cette raison que dans sa *Methodus fluxionum,* élaborée à l'époque de la première édition des Leçons de Barrow, il prend le développement en série infinie pour base générale de la théorie de ces problèmes. Ce développement montre la possibilité des équations en même temps qu'il fournit les moyens de calculer numériquement leurs solutions. Conformément à cette théorie Newton répond aussi dans sa seconde lettre à Leibniz — qui avait objecté[1]) les problèmes inverses de tangentes et en particulier ceux de de Beaune à l'usage général de la méthode des séries mentionnée dans la première lettre de Newton — qu'on n'a pas besoin de recourir aux séries dans le cas d'une équation qui contient seulement l'ordonnée et la soustangente, mais qu'il en est autrement si l'équation contient, outre la soustangente, les deux coordonnées[2]). Croyant, par

---

[1]) Gerhardt: Leibnizens mathematische Schriften I, p. 121.

[2]) Newtoni Opuscula I, p. 356.

suite d'un malentendu, que Newton conteste la possibilité d'une réduction aux quadratures de toute équation différentielle qui contient à la fois les deux variables, Leibniz lui propose, dans sa seconde lettre, un exemple [1]) de la réduction d'une telle équation à des quadratures. Cela était évidemment superflu avec l'élève de Barrow, dont le livre en contient d'autres exemples.

On voit aussi que, tout en appliquant les séries aux équations où ce moyen était indispensable, Newton ne négligeait pas de réduire aux quadratures les équations susceptibles d'être résolues par ce procédé [2]). Et grâce à la différentiation (formation des fluxions), dont il avait déjà reconnu l'immense utilité pour les quadratures, cette réduction lui devenait possible dans beaucoup de cas qui auraient présenté des difficultés insurmontables à Barrow. C'est avant tout dans ses *Principes* qu'on en trouve d'importants exemples. Il a même une formule constante pour exprimer qu'il réduit des problèmes à des quadratures, savoir: *Concessis figurarum curvilinearum quadraturis,* trouver telle chose.

Nous citerons les exemples les plus importants de ces solutions d'équations différentielles.

Au n° 39 du 1er livre des *Principes* il réduit à des quadratures l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \tag{1}$$

où, bien entendu, $\frac{dx}{dt}$ représente la vitesse v, $\frac{d^2x}{dt^2}$ la force accélératrice dans un mouvement uniforme. La première quadrature conduit à

---

1) Leibnizens Schriften I, p. 159.

2) Cela résulte aussi de ses remarques sur la lettre de Leibniz à Conti [Opuscula I, p. 409] où il parle d'un Traité écrit en 1666 où un traité antérieur est augmenté d'une proposition *contenant la méthode inverse des fluxions, telle que je l'avois en ce temps-là: c'est à dire, autant qu'elle peut dépendre de la quadrature des Figures curvilignes* etc.

$$(2) \qquad v^2 = 2\int_0^x f(x)\,dx,$$

(qui représente le principe de la force vive), et la seconde quadrature sert à exprimer t en fonction de x. Ce qu'il faut avant tout remarquer ici, c'est que Newton établit l'équation (2) par une différentiation qui ramène cette équation à l'équation (1). Il est vrai qu'il ne fait dans les *Principes* aucun usage de l'algorithme des fluxions; mais il exécute la différentiation en donnant dans la figure qui représente l'équation (2) des incréments infiniment petits à x et à v.

Dans les n^{os} 8 et 9 du deuxième Livre, Newton traite assez complètement du mouvement rectiligne d'un corps soumis à la pesanteur et à la résistance du milieu, supposée proportionnelle au carré de la vitesse. D'après le choix qu'il fait des unités, l'équation du mouvement serait dans notre langage mathématique

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \mp \frac{1}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Dans le n^o 8, Newton représente l'espace parcouru x au moyen d'une aire hyperbolique, d'une manière que nous exprimerions par l'équation

$$\mp \frac{g}{2}\log\left(1 \mp \frac{v^2}{g^2}\right) = x,$$

où $v = \frac{dx}{dt}$, et il démontre ce résultat par différentiation. Dans le n^o 9 il exprime ensuite les intégrales

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g \mp \frac{1}{g}v^2}$$

par les aires d'un secteur circulaire et d'un secteur hyperbolique. Dans le corollaire 6 du n^o 9, Newton remarque que la relation entre x et t résulte de ces deux équations.

A côté de ces questions qui depuis sont devenues classiques, Newton pose aussi des problèmes dépendant d'équations beaucoup plus compliquées. Il propose, par exemple, dans le *Scholium* ajouté au n° 10 du second livre, un problème qu'il exprime par l'équation différentielle

$$\frac{\dfrac{d^3y}{dx^3}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{4-n}{2}}\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} = f(x, y).$$

Seulement ce que nous avons désigné ici par les quotients différentiels est exprimé par lui au moyen des coefficients, proportionnels à ces quotients, de la série de puissances de o qui sert, en vertu de l'équation de la courbe donnée, à exprimer l'incrément de y correspondant à un incrément donné o de x. La solution de cette équation servirait à déterminer la courbe parcourue par un projectile soumis à la pesanteur et à la résistance d'un milieu, proportionnelle au carré de la vitesse et à la densité du milieu, cette densité étant une fonction donnée des coordonnées. Newton démontre en effet dans le n° 10 que cette résistance est proportionnelle au premier membre de l'équation indiquée. Les applications de cette expression au cercle, à la parabole, et à l'hyperbole fournissent même des exemples où l'équation devient intégrable.

Après nous être occupés de l'influence que Barrow a eue sur Newton, il est naturel de nous demander s'il y a aussi une liaison entre ses recherches et celles de Leibniz. Nous ne pensons pas ici à celle qui s'est exercée d'une manière indirecte par l'intermédiaire de Newton. Nous avons d'autant moins besoin d'en parler que, dans une Note précédente, nous avons dit quelle influence dut avoir sur Leibniz sa sorrespondance avec Newton à une époque où ses propres recherches, commencées dans une direction que Newton suivait alors depuis longtemps, le mettaient en état de comprendre, d'utiliser et de compléter les riches communications que lui faisait Newton.

Il en est tout autrement pour l'influence directe de Barrow. Quoique Leibniz possédât ses Leçons depuis 1673[1]), c'est-à-dire presque depuis le temps où il avait commencé de s'occuper d'analyse infinitésimale, il a toujours fait valoir que ce n'est pas là, mais beaucoup plutôt dans les auteurs du continent, qu'il a puisé les suggestions de ses propres travaux. Sa bonne foi à cet égard est entièrement justifiée par sa correspondance avec Newton de 1675—77. Leibniz s'y empresse, en effet, de communiquer à Newton les résultats qu'il a obtenus en appliquant sa méthode à des problèmes inverses des tangentes. Dans sa lettre du 27 août 1676, il insiste sur sa solution du problème de de Beaune, et quand Newton fait voir dans sa réponse non seulement qu'il est en possession de cette solution, mais qu'il sait aussi réduire à des quadratures toutes les équations que nous écririons $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ou $f(y)$, il est très content de pouvoir lui présenter, dans sa lettre de 1677, la réduction à des quadratures de l'équation

$$S_t = f(y) - x.\ ^{2)}$$

Mais cette équation elle-même est loin de dépasser les limites atteintes par Barrow. Il est bien évident que Leibniz, qui croit dire quelque chose de nouveau à l'ami et collaborateur de Barrow en lui communiquant ces exemples, n'a pas acquis de ses Leçons une connaissance assez approfondie pour se douter de ce qu'elles contiennent sur cette matière. Sur son exemplaire des Leçons de Barrow, au commencement de la 11e Leçon, qui contient précisement les théorèmes servant à réduire à des quadratures les problèmes inverses des tangentes, Leibniz a écrit[3]): *Novi dudum.* Il avait raison de l'écrire, au moment où il faisait une véritable étude de cette Leçon; mais il aurait

[1]) Gerhardt: Leibnizens mathematische Schriften I, p. 46.

[2]) Leibniz fait l'usage inverse des symboles x et y.

[3]) Gerhardt: *Die Entdeckung der höheren Analysis* p. 48.

pu ajouter, avec autant de raison, qu'au moment où il avait acheté le livre, il n'avait pas encore commencé de s'occuper des mêmes questions. Il est donc permis de croire à une de ces impressions qu'on ne se rappelle pas, parce qu'elles proviennent d'objets auxquels on ne s'est guère intéressé au moment où on les a reçues, et qu'elles ne portent par conséquent leurs fruits que longtemps après.

Leibniz a donc fait ce que beaucoup d'inventeurs ont fait après lui. Trop heureux de promener leurs regards dans le vaste champ qui s'ouvre devant eux, ils ne se donnent pas le temps de se demander si d'autres aussi n'y auraient pas déjà pénétré. La même passion que Leibniz a montrée en exagérant encore, dans sa lettre du 27 août 1676 et ailleurs, l'incapacité avouée par Descartes devant le problème de de Beaune et les autres problèmes inverses des tangentes, il la montre en négligeant de consulter à cet égard les Leçons de Barrow qui se trouvaient parmí ses livres. Du reste, très souvent, les progrès de la science ne perdent rien aux négligences de cette nature, quand bien même elles créent une position défavorable à leurs auteurs dans les réclamations de priorité qu'elles soulèvent par la suite. En effet, la connaissance des succès d'un prédécesseur, qui semblent rendre superflues des recherches ultérieures dans la même direction, aurait pu refroidir une ardeur qui a conduit à la découverte de nouveaux et vastes horizons.

En réalité, on voit dans les mêmes lettres Leibniz s'élever à un point de vue très important aussi pour les problèmes inverses des tangentes. Celui d'où il traitait dans sa première lettre le problème de de Beaune ne diffère pas visiblement du point de vue de Barrow. Le problème que nous avons cité de sa dernière lettre rentre encore dans le cadre de ceux que Barrow sait traiter: il ressemble à celui qui se résout par le théorème 28 de la XI[e] Leçon que nous avons déjà cité; mais, tandis que la connexion de ce dernier problème, que nous avons exprimé par l'équation

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = f(x),$$

avec la différentiation des fractions doit être fortuite dans une livre où la différentiation ne joue encore aucun rôle, Leibniz a formé expressément l'équation

$$\left(y\frac{dx}{dy} = \right) S_t = f(y) - x$$

comme exemple d'une équation qu'on intègre au moyen de la différentiation d'un produit. Il prend donc ici la différentiation pour base non seulement des quadratures mais aussi de l'intégration des équations différentielles. Nous avons bien vu que ce point de vue ne diffère pas de celui où Newton se trouvait déjà parvenu et qu'il avait pris pour point de départ des recherches les plus importantes; mais, dans la même lettre, Leibniz ajoute à ce point de vue des ressources dont Newton pouvait bien se passer pour son compte, mais qui ont rendu aux disciples de Leibniz plus facile de le suivre et de l'imiter qu'il ne l'a été aux successeurs de Newton de faire usage des procédés de leur maître. Et je ne pense pas ici exclusivement à son algorithme, car Newton en avait un aussi, mais au soin avec lequel il énonce formellement les règles détaillées des différentiations d'un produit, d'un quotient, d'une puissance ou d'une racine [1]. Ces règles détaillées

[1] Je saisis l'occasion pour remarquer que mon essai d'expliquer, dans une Note *sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal* p. 37 (p. 229 du présent Bulletin 1895), l'erreur dont Leibniz se rend coupable trois fois dans sa lettre de 1677, fait tort à Leibniz. En effet, dès novembre 1676, il a, dans un manuscrit publié par M. Gerhardt (*Die Entdeckung der höheren Analysis* p. 140), indiqué d'une manière correcte comment il faut étendre les résultats de la différentiation des puissances aux racines. La présente rectification ne s'étend pas pourtant aux remarques que je fais à l'endroit cité sur la part qui revient à l'influence de Newton dans cette extension, bien

sont surtout inappréciables lorsqu'il s'agit du calcul inverse: l'intégration. Par exemple, l'intégration des équations que nous venons de citer sautera aux yeux de quiconque connaît les expressions de la différentielle d'un quotient ou d'un produit.

---

connue alors de ce grand géomètre. En effet, Newton lui avait communiqué, dans sa première lettre du 13 juin 1676, (à laquelle il répondit le 27 août 1676) la formule générale du binôme, et alors il connaissait aussi l'*Analysis per æquationes infinitas.*